

Rezultate semnificative ale grantului

Vorticitatile fluidului ideal, fie regulate fie singulare, nu-și pot parasi orbita coadjuncta din grupul de difeomorfisme ce pastreaza volumul.

Vorticitati singulare de codimensiune 2 pentru fluidul ideal 2D, point vortices, au fost intens studiate de-a lungul anilor. In articolele [2,5] ne-am ocupat de curbe de vorticitate in 2D, adica de codimensiunea 1. Am obtinut conditia de precuantificare Onsager-Feynman a orbitelor lor coadjuncte: produsul dintre aria delimitata de curba si vorticitatea totala trebuie sa fie un multiplu intreg al lui 2π . In plus am gasit doua formule pentru caracterul asociat, una geometrica si alta algebrica. Combinand vorticitatile de codimensiune 1 si 2, obtinem pointed vortex loops (exemple de drapele neliniare in dimensiuni mici). Am aratat ca orbitele lor coadjuncte sunt intotdeauna precuantificabile.

Un drapel neliniar (nonlinear flag) intr-o varietate diferentiabila M constă dintr-o colecție de subvarietati incluse una in cealaltă: $N_1 \subset \dots \subset N_k \subset M$. In articolul [1] am studiat geometria varietatilor diferentiabile Fréchet formate din drapele neliniare ponderate. Am descris o clasa de orbite coadjuncte ale grupului de difeomorfisme Hamiltoniene, orbite coadjuncte formate din drapele neliniare ponderate izotrope. Descrierea cuprinde o conditie homologica (referitoare la ponderi), dar foloseste si distributia izodrastica a lui Weinstein.

Spatiile de drapele neliniare se dovedesc a fi utile si ca spatii de forme (shape spaces). In articolul [3] studiem metrici de tipul metricilor elastice pe spatii de drapele neliniare, ce constau din suprafete din \mathbb{R}^3 decorate cu desene 1-dimensionale (curbe). Metrica elastica invariata gauge pe spatiul de forme al suprafetelor nedecorate depinde de suma curburilor principale (curbura medie) si de diferenta lor. Metricile elastice invariante gauge propuse pe spatiul suprafetelor decorate cu curbe depind, in plus, de curburile geodezica si normala ale curbei pe suprafata, precum si de torsiunea geodezica.



Vorticitatile singulare de codimensiune 2 pentru fluidul ideal (filamentele de vorticitate) sunt binecunoscute. In articolul [4] ne-am ocupat de codimensiunea 1: (hiper)suprafete de vorticitate (vortex sheets), adica perechi (N, β) , unde β este o 1-forma de tip Morse pe (hiper)suprafata $N \subset M$. Astfel N este foliata in filamente de vorticitate, cu exceptia unui numar finit de puncte. Pentru a descrie orbitele lor coadjuncte (in Grassmannianul neliniar decorat cu 1-forme), am introdus o varianta a distributiei izodrastice a lui Weinstein adaptata pentru forma volum (in locul celei symplectice).

In general se obtin orbite coadjuncte in extensia centrala Ismagilov a grupului de difeomorfisme (exacte) ce pastreaza volumul $\text{Diff}_{\text{vol}}(M)$. Am descoperit conditia necesara si suficienta pentru a obtine orbite coadjuncte relevante pentru fluidul ideal, adica in $\text{Diff}_{\text{vol}}(M)$ fara ex-

tensie centrala: clasa de coomologie de Rham $[\beta_N]$ anihileaza toate clasele de coomologie din $H^{n-2}(N)$ ce provin din M .

Extensia Ismagilov integreaza extensia centrala Lichnerowicz a algebrei Lie $\mathfrak{X}_{\text{vol}}(M)$ a campurilor vectoriale (exacte) de divergenta zero:

$$H^{n-2}(M) \longrightarrow \Omega^{n-2}(M)/\text{Im } d \longrightarrow \mathfrak{X}_{\text{vol}}(M).$$

Conjectura lui Claude Roger din 1995 afirma ca aceasta extensie este universala. In preprintul [6] am reusit demonstrarea acestei conjecturi, facand un ocol in domeniul algebrelor Leibniz, algebre mai generale decat algebrele Lie, intrucat le lipseste proprietatea de antisimetrie. Mai precis, am aratat ca

$$\text{Ker } d \longrightarrow \Omega^{n-2}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}_{\text{vol}}(M, \mu) H^{n-2}(M) \longrightarrow \Omega^{n-2}(M)/d\Omega^{n-3}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}_{\text{vol}}(M)$$

este o extensie centrala de algebre Leibniz. Faptul ca $\Omega^{n-2}(M)$, spre deosebire de spatiul ei cat, este un spatiu de sectiuni intr-un fibrat vectorial, ne permite sa aplicam teorema lui Peetre.

Articole

- [1] Stefan Haller, Cornelia Vizman - Weighted nonlinear flag manifolds as coadjoint orbits, Canadian Journal of Mathematics, 2023.
- [2] Ioana Ciuclea, Cornelia Vizman - Pointed vortex loops in ideal 2D fluids, J. Phys. A: Math. Theor., 2023, 56 245201.
- [3] Ioana Ciuclea, Alice Barbara Tumpach, Cornelia Vizman - Shape spaces of nonlinear flags, Geometric Science of Information: 6th International Conference, GSI 2023, St.Malo, France, 30.08-1.09.2023, Proceedings, Part I, 41-50 (articolul premiat al conferintei GSI 2023).
- [4] Francois Gay-Balmaz, Cornelia Vizman - Coadjoint orbits of vortex sheets in ideal fluids, trimisa spre publicare.
- [5] Francois Gay-Balmaz, Cornelia Vizman - Vortex loops and characters in 2D fluids, preprint.
- [6] Bas Janssens, Leonid Ryvkin, Cornelia Vizman, Universal central extension of the Lie algebra of exact divergence-free vector fields, preprint.